MATHÉMATIQUES 1

Rédigé par Taoufiki said

EXERCICE

Étude de deux fonctions définies comme sommes de séries

1.1. Montrer que la fonction $u \mapsto \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
Dans la suite, on admettra que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\pi}$.
1.2. Montrer que, pour tout $x > 0$, la série numérique $\sum_{n \geq 1} \sqrt{n} e^{-nx}$ est convergente.
On note φ la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0 \ , \ \varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} e^{-nx}.$$

1.3. Préciser le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$.
Dans la suite de ce problème, on note ψ et ψ_1 les fonctions définies par :

$$\psi_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \ , \ x \in]-1, 1[\quad \text{et} \quad \psi(x) = \psi_1(e^{-x}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} \ , \ x > 0$$

1.4. Régularité des fonctions ψ et φ
1.4.1. Montrer que la fonction ψ est de classe C^∞ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et préciser sa dérivée en fonction de φ.
1.4.2. En déduire que la fonction φ est de classe C^∞ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
1.5. Un équivalent de ψ en 0^+
1.5.1. Soit $x > 0$. Justifier que, pour tout $a \geq 0$, $\int_a^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt$ converge et montrer que

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt \leq \psi(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt.$$

1.5.2. En déduire que, pour tout $x > 0$, $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{xu}} du \leq \psi(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{xu}} du$.

1.5.3. Montrer que $\psi(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$.
1.6. Préciser la limite de ψ en $+\infty$.
1.7. Un équivalent de φ en 0^+.
1.7.1. Montrer que la suite réelle $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \right)_{n \geq 1}$ est monotone puis justifier qu'elle converge.

1.7.2. Montrer que, pour tout $x > 0$, La série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)e^{-nx}$ est convergente.

1.7.3 Montrer que, pour tout $x > 0$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)e^{-nx} = \frac{\psi(x)}{e^x - 1}$.

1.7.4 En déduire que $\varphi(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$.

PROBLÈME

À propos de l'irrationalité du nombre e^r

où r est un rationnel non nul

L'objectif de ce problème est d'établir l'irrationalité du nombre e^r pour tout nombre rationnel non nul r, où e est la base du logarithme népérien.

Notations

Dans ce problème, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.
Pour tout $(r, k) \in \mathbb{N}^2$, avec $k \leq r$, on note $\left(\begin{array}{c} r \\ k \end{array}\right)$ le coefficient binomial défini par

$$\left(\begin{array}{c} r \\ k \end{array}\right) = \frac{r!}{k!(r-k)!}.$$

$1^{\text{ère}}$ Partie

Résultats préliminaires utiles

2.1. Étude de suites
2.1.1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que la suite $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente de limite nulle. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle.
2.1.2. Soit λ un nombre réel non nul. Montrer que la suite $\left(\frac{\lambda^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite nulle.
2.2. Valeurs prises par les dérivées successives d'une fonctions polynomiale
Soit n un entier naturel non nul, on considère la fonction polynomiale U_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ U_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$$

2.2.1. Montrer que, pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$, $U_n^{(k)}(0) = 0$ et $U_n^{(k)}(1) = 0$.
2.2.2. Préciser, en fonction de n et k, la valeur de chacun des nombres $U_n^{(n+k)}(0)$ et $U_n^{(n+k)}(1)$ pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, puis vérifier que ces nombres sont des entiers.
On pourra utiliser le binôme de Newton ainsi que la formule de Taylor pour les polynômes.
2.3. Formule d'intégration par parties itérée
Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et soit p un entier naturel non nul. On considère deux

fonctions numériques $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^p sur $[a, b]$.
Montrer la formule d'intégration par parties itérée suivante :

$$\int_a^b f^{(p)}(t)g(t)dt = (-1)^p \int_a^b f(t)g^{(p)}(t)dt + \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}\left(f^{(p-k)}(b)g^{(k-1)}(b) - f^{(p-k)}(a)g^{(k-1)}(a)\right) \quad (1)$$

2.4. Un critère d'irrationalité
Soit ω un réel strictement positif. On pose $\omega\mathbb{Z} = \{k\omega \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{Z}+\omega\mathbb{Z} = \{k+k'\omega \ ; \ (k, k') \in \mathbb{Z}^2\}$.
2.4.1. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que $\mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$. Montrer que ω est rationnel, c'est à dire que $\omega \in \mathbb{Q}$.
2.4.2. On suppose ici que $\omega \in \mathbb{Q}$ et on note p et q deux entiers naturels non nuls, premiers entre eux et tels que $\omega = \frac{p}{q}$. On pose enfin $a = \frac{1}{q}$.
(i) Montrer que $\mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$.
(ii) Montrer que $a\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}$. On pourra admettre l'existence de deux entiers u et v tels que $up + vq = 1$.
2.5. Une condition suffisante d'irrationalité
2.5.1. Soit $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite convergente de nombres entiers dont la limite est nulle. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geq N \ : \ k_n = 0$$

2.5.2. Soit ω un nombre réel non nul et soient $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de nombrtes entiers tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ p_n\omega - q_n \neq 0$$

Montrer que si la suite $(p_n\omega - q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite nulle, alors le nombre ω est irrationnel.

$2^{\text{ème}}$ Partie

Démonstration du résultat annoncé

L'objectif de cette partie est de prouver l'irrationalité du nombre e^r pour tout rationnel non nul r.
3.1. Construction du nombre e, base du logarithme népérien
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$$

3.1.1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
Dans la suite, on note e leur limite commune ; c'est le nombre de Neper, base du logarithme népérien.
3.1.2. Justifier que $u_n < e < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3.2. Irrationalité de e
Vérifier que $(n!u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de nombres entiers puis montrer que e est irrationnel.
On pourra utiliser le résultat de la question **2.5.2.** de la deuxième partie.
Dans la suite de cette partie, on considère les fonctions U_n et L_n définies, pour tout entier naturel non nul n, par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ U_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} \ , \ L_n(x) = U_n^{(n)}(x) \ \text{ et } \ T_n(x) = \int_0^1 e^{xt}L_n(t)dt$$

3.3. Préciser les degrés des polynômes U_n et L_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3.4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et x un réel non nul.
3.4.1. Montrer que

$$T_n(x) = (-1)^n x^n \int_0^1 e^{xt} U_n(t)dt$$

3.4.2. Montrer que $T_n(x) \neq 0$.
3.5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et x un réel non nul.
3.5.1 Montrer que $|x^n T_n(x)| \leq \frac{x^{2n}}{4^n n!} \max(1, e^x)$. On pourra majorer $t(1-t)$ pour $t \in [0,1]$.
3.5.2 En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n T_n(x) = 0$.
3.6. Soit n un entier non nul. On pose $\psi_x(t) = e^{xt}$, $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]$.
3.6.1 Vérifier que pour tout réel x

$$x^{n+1} T_n(x) = (-1)^n \int_0^1 \psi_x^{(2n+1)}(t) U_n(t)dt$$

3.6.2 Montrer qu'il existe deux fonctions polynomiales P_n et Q_n, à coefficients entiers et de degré n, telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ x^{n+1} T_n(x) = Q_n(x) e^x - P_n(x)$$

On pourra utiliser la formule d'intégration par parties itérée **(1)** et le résultat de la question **2.2.2.** de la première partie.
3.7. Montrer l'irrationalité du nombre e^r pour tout nombre entier non nul r.
3.8. En déduire l'irrationalité du nombre e^r pour tout nombre rationnel non nul r, puis celle du nombre $\ln \alpha$ pour nombre nombre rationnel α strictement positif et distinct de 1.

FIN DE L'ÉPREUVE